Trabajo y energía

Teorema de fuerzas vivas. Trabajo de una fuerza

$$W^F = \int_{r_o}^{r_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$\int_{x_o}^{x_1} F_x \cdot dx + \int_{y_o}^{y_1} F_y \cdot dy + \int_{z_o}^{z_1} F_z \cdot dz$$

$$\int_{|\bar{r}_0|}^{|\bar{r}_1|} |\bar{F}| \cdot |d\bar{r}| \cdot \cos(\alpha)$$

Trabajo de una fuerza

- Si analizamos la expresión

$$W^F = \int_{|\bar{r}_0|}^{|\bar{r}_1|} |\bar{F}| \cdot |d\bar{r}| \cdot \cos(\alpha)$$

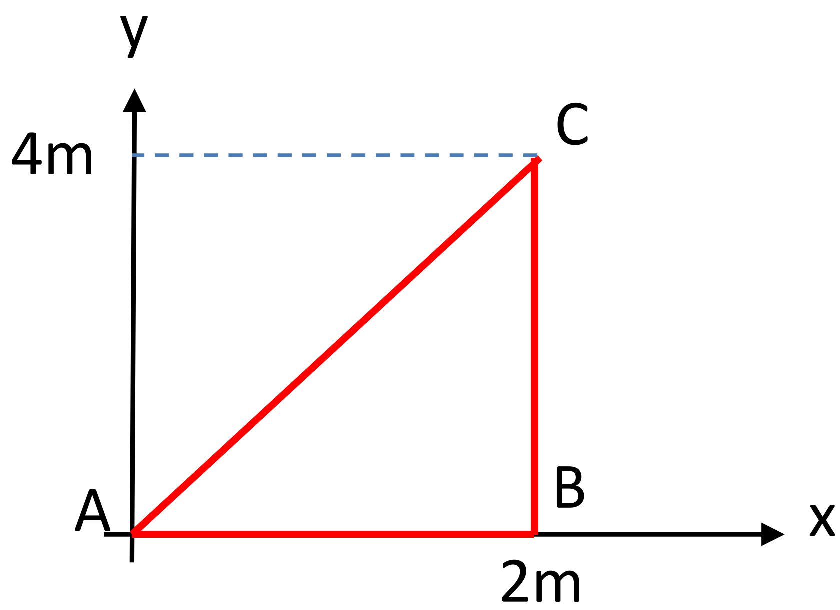
- El trabajo de una fuerza es:
  - Positivo si $0 \leq \alpha < {}^{\pi}/_{2}$
  - Negativo si ${}^{\pi}/_{2} < \alpha \leq \pi$
  - Nulo si $\alpha = 0$

- Caso particular: si una fuerza es constante y el ángulo que forma con el desplazamiento también, entonces:

$$W^F = |\bar{F}| \cdot |\Delta\bar{r}| \cdot \cos(\alpha)$$

Ejemplo 1: Calcular el trabajo por definición (parecido al ej. 12)

Un objeto sigue la trayectoria ABCA que se indica en la figura. Sobre él actúa una fuerza $\bar{F} = \left(2xy\,\frac{N}{m^2}\right)\breve{\imath} + \left(x^2\,\frac{N}{m^2}\right)\breve{\jmath}$. Calcular el trabajo de dicha fuerza



Tramo AB

$$W_{AB}^{F} = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$W_{AB}^{F} = \int F_x \cdot dx + \cancel{\int F_y \cdot dy}$$

$$dx \Rightarrow x_A = 0, x_B = 2m$$

$$dy = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$W_{AB}^{F} = \int_{x_A=0m}^{x_B=2m} 2\mathrm{xy} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{dx} = 0J$$

$$y = 0$$

Tramo BC

$$W_{BC}^{F} = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$W_{BC}^{F} = \cancel{\int F_x \cdot dx} + \int F_y \cdot dy$$

$$dx = 0 \Rightarrow x = 2m$$

$$dy \Rightarrow y_B = 0, y_C = 4m$$

$$W_{BC}^{F} = \int_{y_B = 0m}^{y_c = 4m} x^2 \frac{N}{m^2} \cdot \mathrm{dy}$$

$$W_{BC}^{F} = \int_{y_B = 0m}^{y_c = 4m} (2m)^2 \frac{N}{m^2} \cdot \mathrm{dy} = 4N \cdot y \Big|_{0m}^{4m} = 16J$$

Tramo CA

$$W_{CA}^{F} = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$W_{CA}^{F} = \int F_x \cdot dx + \int F_y \cdot dy$$

$$dx \Rightarrow x_c = 2m, x_A = 0m$$

$$dy \Rightarrow y_C = 4m, y_A = 0m$$

$$W_{CA}^{F} = \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 2\mathrm{xy}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{dx} + \int_{y_C=4m}^{y_A=0m} x^2 \frac{N}{m^2} \cdot \mathrm{dy}$$

¡¡¡¡NOOO!!!!!

Tramo CA

$$W_{CA}^{F} = \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 2\mathrm{xy}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{dx} + \int_{y_C=4m}^{y_A=0m} x^2\frac{N}{m^2}\cdot \mathrm{dy}$$

$$y = 2x$$

$$dy = 2dx$$

$$W_{CA}^{F} = \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 2\mathrm{x}(2\mathrm{x})\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{dx} + \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} x^2\frac{N}{m^2}\cdot 2\cdot dx$$

Otra opción: en vez de reemplazar dy, se puede reemplazar x=y/2

$$W_{CA}^{F} = \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 4x^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{dx} + \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 2x^2\frac{N}{m^2}dx$$

$$W_{CA}^{F} = \int_{x_C=2m}^{x_A=0m} 6x^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{dx} = 2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}x^3\Big|_2^0 = -16J$$

Trabajo total

$$W^F = W_{AB}^F + W_{BC}^F + W_{CA}^F$$

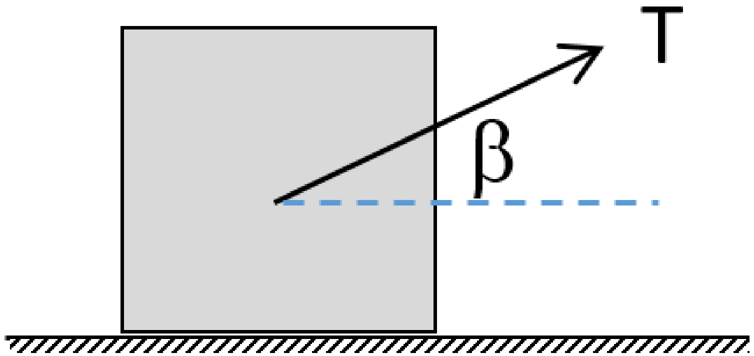
$$W^F = 0J + 16J + (-16J) = 0J$$

PARA PRÓXIMAS CLASES:

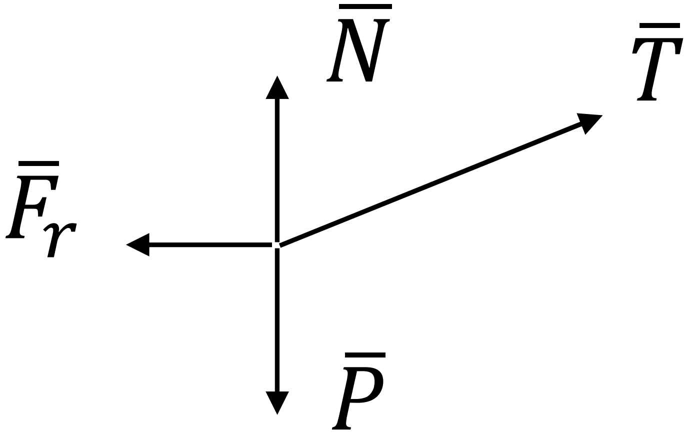
- ¿Se puede pensar que esta es una fuerza conservativa?
- ¿Qué condiciones debe cumplir para serlo?

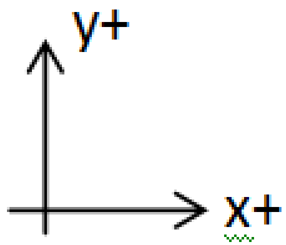
Ejemplo 2: Calcular el trabajo por definición

- Un objeto de masa M=2kg se mueve en superficie horizontal con rozamiento ($\mu=0,1$) cuando se tira con una soga que hace una $|\bar{T}| = 4x$ forma un ángulo $\beta=30°$ con la horizontal. Si se mueve desde x=0m hasta x=2m, calcular el trabajo de cada una de las fuerzas que actúan sobre el objeto



- DCL





$$d\bar{r} = dx\hat{i} \Rightarrow \left|d\bar{r}\right| = \left|dx\hat{i}\right| = dx$$

$$W^F = \int \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

$$W^F = \int \left[F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \right] \cdot dx\hat{i}$$

$$W^F = \int_0^2 F_x \cdot dx$$

$$W^F = \int_0^2 4x \cdot \cos\beta \cdot dx = \int_0^2 4x \cdot \cos(30^\circ) \cdot dx$$

$$W^F = 2x^2 \cdot \cos(30^\circ) \Big|_0^2 = 8 \cdot \cos(30^\circ) J$$

OTRA OPCIÓN

$$W^F = \int \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

$$W^F = \int \left|\overline{F}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \left|d\overline{r}\right|$$

$$W^F = \int_0^2 4x \cdot \cos(30°) \cdot dx$$

$$W^F = 2x^2 \cdot \cos(30°)\Big|_0^2 = 8 \cdot \cos(30°) J$$

$$W^{Fr} = \int \overline{Fr} \cdot d\bar{r}$$

$$W^{Fr} = \int \mu N(-\hat{i}) \cdot dx\hat{i}$$

$$W^{Fr} = \int_0^2 -\mu N \cdot dx = \int_0^2 -\mu(Mg - 4x \cdot sen\beta) \cdot dx$$

$$W^{Fr} = \int_0^2 -\mu(Mg - 4x \cdot sen(30°)) \cdot dx = \int_0^2 (-2 + 0{,}2x) \cdot dx$$

$$W^{Fr} = (-2x + 0{,}1x^2)\Big|_0^2 = -3{,}6J$$

OTRA OPCIÓN

$$W^{Fr} = \int \overline{Fr} \cdot d\bar{r}$$

$$W^{Fr} = \int \left|\overline{Fr}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \left|d\bar{r}\right|$$

$$W^{Fr} = \int \left|\mu N\right| \cdot \cos\alpha \cdot \left|d\bar{r}\right|$$

$$W^{Fr} = \int_0^2 \left|\mu(Mg - 4x \cdot sen\beta)\right| \cdot \cos(180°) \cdot dx$$

Esta es la misma expresión que obtuvimos antes

$$W^{Fr} = \int_0^2 \left|\mu(Mg - 4x \cdot sen\beta)\right| \cdot (-1) \cdot dx$$

$$W^{N} = \int \overline{N} \cdot d\overline{r}$$

$$W^{N} = \int \left|\overline{N}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \left|d\overline{r}\right|$$

$$W^{N} = \int \left|\overline{N}\right| \cdot \cos(90^{\circ}) \cdot \left|d\overline{r}\right| = 0J$$

$$W^{P} = \int \overline{P} \cdot d\overline{r}$$

$$W^{P} = \int \left|\overline{P}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \left|d\overline{r}\right|$$

Puedo calcularlo así
porque F es constante

$$W^{P} = \left|\overline{P}\right| \cdot \left|\Delta x\right| \cdot \cos(90°) = 0J$$